Übungen zur Wiederholungsklausur 2 • 12.2

für Montag, 20. Mai 2019 • 15:30 – 17:00

Geraden • Ebenen • Lagebeziehungen

Aufgabe 1. a) Ebene E durch die Punkte $A(5|3|-1)$, $B(8|1|-1)$ und $C(4|4|0)$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E:\ 2x + 3y - z = 20$

b) Gerade g durch die Punkte $P(-1|9|0)$ und $Q(7|-1|-4)$.

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Liegt Punkt P oder Q auf E? Und liegt einer der Punkte A, B oder C auf g? ► Weder noch.

d) Schneiden sich g und E? Ja. Können Sie das an den richtungsbestimmenden Vektoren der beiden Objekte g und E sehen? – Bestimmen Sie den Schnittpunkt S.

$S(3|4|-2)$

e) Gerade h durch P und senkrecht zu E aufschreiben („Lot konstruieren"). Dann Schnittpunt P' von h mit E bestimmen („Lotfußpunkt"). ►

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in E-Gleichung eingesetzt ergibt

$$25 + r\cdot 14 = 20$$

und damit $r = -14/5 = -2{,}8$. Einsetzen von r in h ergibt $P'(4{,}6|0{,}6|2{,}8)$.

f) Neue Punkte T auf g und U auf E „generieren", das heißt: ausdenken, so dass die entsprechenden Bedingungen erfüllt sind. ► Für T irgendeinen Parameter r in g wählen, etwa $r = -1$. Dann ist $T = (-5|1|2)$. Und für U einfach zwei Werte für x, y und z wählen und den dritten in der $E - Gleichung$ anpassen, etwa $x = 1$ und $y = 1$. Dann muss $5 - z = 20$ sein, also $z = -15$ und $U = (1|1|-15)$.

g) Ebene E' parallel zu E und durch P. – Liegt Q auf F? ► $\vec{n}_{E'} = \vec{n}_E$ und $d_{E'} = \vec{n}_{E'} \bullet \vec{p} = 25$. Also $E':\ 2x + 3y - z = 25$. – Q eingesetzt (Punktprobe) ergibt $15 \neq 25$, also $Q \notin E'$.

h) Ebene F durch die drei Punkte P, Q und $R(0|2|8)$. ►

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_F:\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 17 \\ -17 \\ -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{n}_F$$

Damit ist $d_F = \vec{n}_F \bullet \vec{p} = 10$, also $F:\ -x + y + z = 10$.

i) Schneiden sich E und F? – Oder sind sie parallel? Letzteres nicht, warum? Dann aber müssen sie sich schneiden. – Schnitt(gerade) berechnen. ► Nicht parallel, da Normalenvektoren nicht Vielfache voneinander. Für den Schnitt das LGS der beiden Koordinatengleichungen lösen:

$$\begin{array}{rcl|l} 2x + 3y - \mathrm{z} &=& 20 & +\mathrm{II} \\ -x + \ \ y + \mathrm{z} &=& 10 & \bullet \end{array}$$

ergibt $x + 4y = 30$, also $x = 30 - 4y$ und $y \in \mathbb{R}$. Und dies eingesetzt in II ergibt $z = 10 + x - y = 40 - 5y$. Zusammengeschrieben ist das die Schnittgerade:

$$g_S:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + r\cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$